ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑ.Λ.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. (απόδειξη σχολικού βιβλίου)

Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Έχουμε

$$F(x+h)-F(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))$$
$$=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x)),$$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).$$

Άρα $\quad \boldsymbol{(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)}$

Α2.

α) **Τι ονομάζουμε συχνότητα (ή απόλυτη συχνότητα) ν_i;**

ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.

β)

Στις περιπτώσεις που δίνεται διαφορετική βαρύτητα (έμφαση) στις τιμές x_1, x_2, $\ldots$, x_ν ενός συνόλου δεδομένων, τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον **σταθμισμένο αριθμητικό μέσο** ή **σταθμικό μέσο** (weighted mean). Εάν

σε κάθε τιμή x_1, x_2, $\ldots$, x_ν δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) w_1, w_2, $\ldots$, w_ν, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+\ldots+x_\nu w_\nu}{w_1+w_2+\ldots+w_\nu}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_iw_i}{\sum_{i=1}^{\nu}w_i}.$$

Α3.

α→Λάθος, β→ Λάθος, γ→Σωστό, δ→ Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+\left(5x\right)'+\left(\frac{1}{3}\right)'=x^2-6x+5+0=x^2-6x+5$

Β2. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}$ $\quad f'(x)=x^2-6x+5$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$$

$$\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot5=36-20=16$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\begin{cases}\frac{6+4}{2}=\frac{10}{2}=5\\ \frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1\end{cases}$$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Στο $(-\infty,1]$ η f γν.Αύξουσα.

Στο $[1,5]$ η f γν.Φθίνουσα.

Στο $[5,+\infty)$ η f γν.Αύξουσα.

Τ.Μ. $f(1)=\frac{1}{3}\cdot1^3-3\cdot1^2+5\cdot1+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-3+5+\frac{1}{3}=2+\frac{2}{3}=\frac{6+2}{3}=\frac{8}{3}$

Τ.Ε. $f(5)=\frac{1}{3}\cdot5^3-3\cdot5^2+5\cdot5+\frac{1}{3}=\frac{125}{3}-75+25+\frac{1}{3}=\frac{126}{3}-50=$

$$=\frac{126-150}{3}=\frac{-24}{3}=-8$$

Β3. Η εφαπτομένη έχει την εξίσωση: $y=\lambda x+\beta$, όπου :

$$\lambda=f'(0)=0^2-6\cdot0+5=5$$

$$y_0=f(0)=\frac{1}{3}\cdot0^3-3\cdot0^2+5\cdot0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$y_0 = \lambda x_0 + \beta \Leftrightarrow \frac{1}{3} = 5 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \beta$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η: $y = 5x + \frac{1}{3}$

B4. $$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = f'(-1) = (-1)^2 - 6\cdot(-1) + 5 = 1 + 6 + 5 = 12$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $$s = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{2x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+7}{2} = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x^2 + 6x - 7 = (x-1)(x+7)$$

(Παραγοντοποίηση με Σχ. Χόρνερ)

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -7 & \boxed{1} \\ & 1 & 7 & \\ \hline 1 & 7 & \boxed{0} & \end{array}$$

Γ2. $$CV = 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = 0{,}2 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{s}{0{,}2} = \frac{4}{0{,}2} = \frac{40}{2} \Leftrightarrow \bar{x} = 20$$

Γ3.

$$\bar{x} = 20 \Leftrightarrow \frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5} = 20 \Leftrightarrow 90 + \kappa = 100 \Leftrightarrow \kappa = 100 - 90 = 10$$

Οι αριθμοί είναι: 22, 18, 20+10, 14, 16 και τους βάζουμε σε αύξουσα σειρά:

14, 16, 18, 22, 30. Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 5 (περιττός), η μεσαία παρατήρηση θα είναι η $3^{η}$, δηλαδή το 18. Άρα **δ = 18**.

Γ4. $$y_i = x_i + \frac{10}{100}x_i = x_i(1+0{,}1) \Rightarrow y_i = 1{,}1\cdot x_i$$

Άρα $\bar{y} = 1{,}1\cdot\bar{x}$ και $s_y = |1{,}1|\cdot s_x = 1{,}1\cdot s$

Επομένως: $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{1{,}1\cdot s}{1{,}1\cdot\bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}} = CV = 0{,}2$ ή 20%

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$x^2+y^2=10^2 \Leftrightarrow y^2=100-x^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{100-x^2}$$

$f(x)=\sqrt{100-x^2}$. Θα πρέπει: $100-x^2\ge 0$

$$100-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=100 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{100} \Leftrightarrow x=\pm 10$$

x	$-\infty$		-10		0		10		$+\infty$
$100-x^2$		$-$	0			$+$	0	$-$	

Επειδή πρόκειται για διαστάσεις θα έχουμε: $x\in(0,10)$

(Δεν μπορεί να είναι ούτε μηδέν ούτε 10)

Δ2.

$$f'(x)=\left(\sqrt{100-x^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{100-x^2}}\cdot\left(100-x^2\right)'=\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$f'(8)=\frac{-8}{\sqrt{100-8^2}}=\frac{-8}{\sqrt{100-64}}=\frac{-8}{\sqrt{36}}=\frac{-8}{6}=-\frac{4}{3}$$

Δ3. $$\lim_{x\to 6}\frac{f(x)-8}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{100-x^2}-8\right)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)^{*}}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=$$

$$*\ \left(\sqrt{100-x^2}-8\right)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)=\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2-8^2=100-x^2-64=$$

$$=36-x^2=6^2-x^2=(6-x)(6+x)=-(x-6)(6+x)$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{-(x-6)(6+x)}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{-(6+x)}{\sqrt{100-x^2}+8}=\frac{-(6+6)}{\sqrt{100-6^2}+8}=$$

$$=\frac{-12}{\sqrt{100-6^2}+8}=\frac{-12}{\sqrt{100-36}+8}=\frac{-12}{\sqrt{64}+8}=\frac{-12}{8+8}=-\frac{12}{16}=-\frac{3}{4}$$

Δ4. Στο ερώτημα αυτό θα μελετήσουμε την f(x) ως προς τη μονοτονία.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}=0 \Leftrightarrow -x=0 \Leftrightarrow x=0$$

x	$-\infty$	0		10	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		
$f(x)$			$\searrow$		

$f'(x)<0$ για κάθε $x \in A_f$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Είναι: $x_1=2{,}3<x_3=2{,}8<x_2=3{,}5$. Άρα από τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης θα έχουμε: $f(x_1)>f(x_3)>f(x_2)$ (το ζητούμενο)