ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Τετάρτη 23 Μαΐου 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολ. βιβλίου σελ. 31

Α2. Ορισμός σχολ. βιβλίου σελ. 148

Α3. Θεωρία σχολ. βιβλίου σελ. 96

Α4. α→Λ β→Σ γ→Λ δ→Σ ε→Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από ορισμό της διαμέσου κι με τη βοήθεια του διαγράμματος προκύπτει ότι: $\delta = 25$

Β2. Από ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων έχω:

$$\left.\begin{array}{l} F_2 = 0{,}5 \leftrightarrow f_1 + f_2 = 0{,}5 \\ v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 7\alpha + 4 \\ f_1 = \dfrac{v_1}{v} = \dfrac{\alpha+4}{7\alpha+4} \\ f_2 = \dfrac{v_2}{v} = \dfrac{3\alpha-6}{7\alpha+4} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{4\alpha-2}{7\alpha+4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 8$$

Για τη συμπλήρωση του πίνακα κάνουμε χρήση των τύπων:

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i \cdot v_i$	$x_i^2 v_i$
[5,15)	10	12	20	12	20	120	1200
[15,25)	20	18	30	30	50	360	7200
[25,35)	30	24	40	54	90	720	21600
[35,45)	40	6	10	60	100	240	9600
Σύνολο		60	100			1440	39600

$f_i\% = \dfrac{v_i}{v} \cdot 100\%$, $i = 1$ έως 4.

$N_i = N_{i-1} + v_i$, $i = 1$ έως 4.

$F_i\% = F_{i-1}\% + f_i\%$, $i = 1$ έως 4.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΘΕΜΑΤΩΝ: ΙΩΑΝΝΗΣ ΜΠΕΗΣ

B3. $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \dfrac{1440}{60} = 24$

Από τον τύπο: $s^2 = \dfrac{1}{\nu} \cdot \left[\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \cdot \nu_i - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i\right)^2}{\nu} \right] =$

$= \dots = 84$, οπότε $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{84} \cong 9{,}17$

B4. Χωρίζουμε την κλάση [35,45) σε κλάσεις πλάτους 2.
Επειδή θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες,
σε καθεμιά αντιστοιχεί το $\frac{1}{5}$ του 10%, δηλ. 2%
Επομένως 37 λεπτά χρειάστηκαν όσοι ανήκουν
στις κλάσεις [37,39), [39,41), [41,43), [43,45)
Δηλαδή το 8%.

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε A το ενδεχόμενο να μαθαίνει κάποιος Γαλλικά.

Οπότε $P(A)=\dfrac{3\nu}{\nu^2+1}$

Θεωρούμε B το ενδεχόμενο να μαθαίνει κάποιος Ισπανικά.

οπότε $P(B)=\dfrac{\nu+2}{\nu^2+1}$

$$P(A\cap B)=\frac{\nu+1}{\nu^2+1}$$

$$P(A\cup B)=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}$$

$$\underset{(\text{Απρ. Μορφή})}{\overset{\frac{0}{0}}{\longrightarrow}}\ \lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(x^2-1\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\dots=1$$

Γ1. Επειδή $P(A\cup B)=1$, το ενδεχόμενο $A\cup B$ είναι βέβαιο

Γ2. Από προσθετικό νόμο είναι:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\overset{\text{από Γ1}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 1=\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu^2-3\nu=0\ \begin{cases}\nu=0 & (\text{Απορρίπτεται } (\nu\geq 3))\\ \nu=3 & (\text{ΔΕΚΤΗ})\end{cases}$$

Γ3. Ψάχνουμε τη πιθανότητα του ενδεχομένου $(A-B)\cup(B-A)$

$$P\Big((A-B)\cup(B-A)\Big)=P(A-B)+P(B-A)=$$

$$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=$$

$$=\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-2\cdot\frac{\nu+1}{\nu^2+1}\overset{\nu=3}{=}\longrightarrow\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Γ4. Από κλασσικό ορισμό πιθανότητας κ επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, έχω:

$$\left.\begin{aligned}P(A\cap B)&=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}\\ N(A\cap B)&=32\end{aligned}\right\}\rightarrow\frac{4}{10}=\frac{32}{N(\Omega)}\Leftrightarrow N(\Omega)=80$$

ΘΕΜΑ Δ

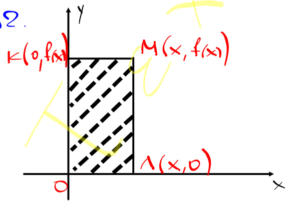
Δ1. $A_f=(0,+\infty)$ κ f παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=\frac{(1+\ln^2x)'\cdot x-(1+\ln^2x)\cdot(x)'}{x^2}=$$

$$=\frac{-(\ln^2x-2\ln x+1)}{x^2}=\frac{-(\ln x-1)^2}{x^2}<0$$

Οπότε η f είναι γν. φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

Δ2.



Το εμβαδό του σχηματιζόμενου ΟΚΜΛ είναι:

$$E(x)=x\cdot f(x)=x\cdot\frac{1+\ln^2x}{x}=1+\ln^2x$$

Η $E(x)$ παραγωγίσιμη με $E'(x)=\frac{1}{x}\cdot 2\ln x$

$E'(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

$E'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x>0 \Leftrightarrow x>1$

x	0		1		$+\infty$
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Ο.Ε.		

Το εμβαδό ελαχιστοποιείται όταν $x=1$. (Άρα $f(1)=1$)

Άρα το ορθογώνιο $\rightarrow$ ΤΕΤΡΑΓΩΝ

Δ3. Ισχύει ότι: $\lambda_\varepsilon=f'(1)$ (ε // εφαπτομένη)

οπότε $\lambda_\varepsilon=-1$

Άρα $y_i=-x_i+\beta$

Από εφαρμογή 3 του σχολ. βιβλίου (Σελ. 94), έχω

$$\left.\begin{array}{l}\bar{y}=-\bar{x}+\beta\\ s_y=s_x\end{array}\right\}\rightarrow \begin{array}{l}\bar{y}=-10+\beta\\ s_y=2\end{array}$$

Για να είναι ομοιογενές θα πρέπει: $CV_y\leq 0{,}1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2}{|-10+\beta|}\leq 0{,}1 \Leftrightarrow |\beta-10|\geq 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\beta\geq 30$ ή $\beta\leq -10$

Δ4. Ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l}A\subseteq A\cup B\\ A\cap B\subseteq A\cup B\end{array}\right\}\rightarrow \begin{array}{l}P(A)\leq P(A\cup B)\ (1)\\ P(A\cap B)\leq P(A\cup B)\ (2\end{array}$$

Επειδή $P(A)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$ αριθμοί μικρότεροι ή ίσοι της μονάδας και σύμφωνα με τον πίνακα παρατηρούμε ότι η f στο $(0,1]$ είναι $\searrow$

Άρα οι (1), (2) γίνονται:

$$\begin{array}{l}f(P(A))\geq f(P(A\cup B))\\ f(P(A\cap B))\geq f(P(A\cup B))\quad (+)\\ \hline f(P(A))+f(P(A\cap B))\geq 2f(P(A\cup B))\end{array}$$