

ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σελίδα 31 Σχολικό βιβλίο

A2. α) $\rightarrow \Lambda$

β) $\rightarrow \Sigma$

γ) $\rightarrow \Sigma$

A3. α) $(x^\rho)' = \rho \cdot x^{\rho-1}$

β) $(\sin x)' = \cos x$

γ) $\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_v w_v}{w_1 + w_2 + \dots + w_v}$

ΘΕΜΑ Β

B1. $\kappa = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 1 + 2 = 3$

(Το τριώνυμο $x^2 + x - 2$ μηδενίζεται στο $x = 1$ και στο $x = -2$).

B2. Οι βαθμοί για $\kappa = 3$ είναι οι: 4, 3, 5, 6, 7, 4, 6, 5, 6, 4

$$\bar{x} = \frac{4 + 3 + 5 + 6 + 7 + 4 + 6 + 5 + 6 + 4}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

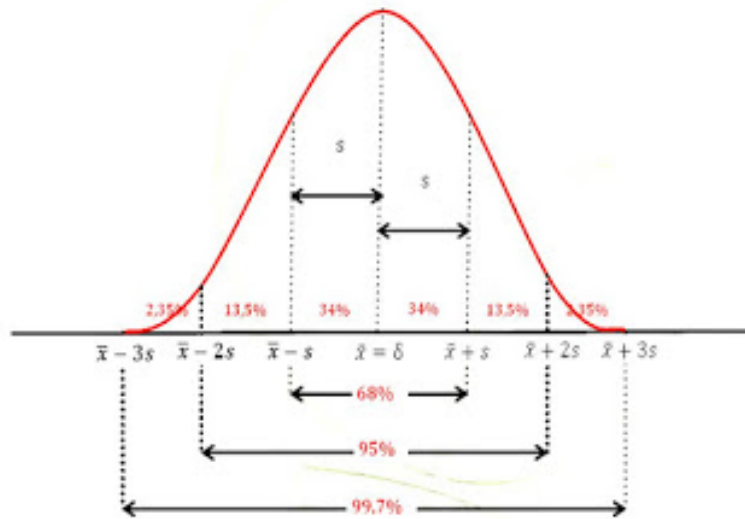
B3.

$$s^2 = \frac{(4-5)^2 \cdot 3 + (3-5)^2 + (5-5)^2 \cdot 2 + (6-5)^2 \cdot 3 + (7-5)^2}{10} = \frac{14}{10} = 1,4$$

B4. $CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{1,18}{5} \cdot 100\% = 0,236 \cdot 100\% = 23,6\%$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Το 50% έχει τιμή μεγαλύτερη των 40 ετών Άρα στη μέση(δηλαδή στη μέση τιμή αντιστοιχεί το 40.

Γ2. Παρατηρώ ότι $13,5\% + 2,35\% + 0,15\% = 16\%$ ανήκει στο διάστημα μέχρι την τιμή $\bar{x} - s$ (δηλαδή στο 35).
 Άρα $\bar{x} - s = 35 \Leftrightarrow s = 40 - 35 \Leftrightarrow s = 5$

Γ3. Ηλικία μεγαλύτερη των 45 $\rightarrow 16\%$
 $v_i = f_i \cdot v = 0,16 \cdot 400 = 64$ εργαζόμενοι.

Γ4. Ηλικίες στο διάστημα (30,45) $\rightarrow 81,5\%$
 $v_i = f_i \cdot v = 0,815 \cdot 400 = 326$ εργαζόμενοι.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \dots = -x^2 + 4x - 3$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ και $x_2 = 3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		□	□	□	

Στο $(-\infty, 1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα, γιατί στο $(-\infty, 1)$ $f'(x) > 0$.
 Στο $[1, 3]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί στο $(1, 3)$ $f'(x) < 0$.
 Στο $[3, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί στο $(3, +\infty)$ $f'(x) < 0$.

Δ2. Θέσεις ακροτάτων: $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$ (εκεί μηδενίζεται η $f'(x)$).
 Από το κριτήριο εύρεσης ακροτάτων στο $x_1 = 1$ η $f(x)$ έχει Τ.Ε. και στο $x_2 = 3$ η $f(x)$ έχει Τ.Μ.

$$f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -\frac{1}{3} + 2 - 3 + 1 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{3}$$

$$f(3) = -\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = -\frac{27}{3} + 18 - 9 + 1 \Leftrightarrow f(3) = 1$$

Δ3. Η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2017$.

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda = 1$.

Δηλαδή $f'(x_0) = 1$ σε ένα σημείο με συντεταγμένες (x_0, y_0)

$$f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4x_0 - 3 = 1 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4x_0 - 4 = 0$$

Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα το $x_0 = 2$ (έχει διακρίνουσα $\Delta = 0$)

$$f(2) = -\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -\frac{8}{3} + 8 - 6 + 1 \Leftrightarrow f(2) = -\frac{8}{3} + 3 = \frac{1}{3}$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $A\left(2, \frac{1}{3}\right)$.

Δ4. Είναι $f''(x) = \dots = -2x + 4$.

Τεταγμένες $y = -2x + 4$. Συνεπώς: $\bar{y} = -2\bar{x} + 4$.

$$s_x^2 = 3^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_5 - \bar{x})^2}{5} = 9$$

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_5 - \bar{y})^2}{5} = \\ &= \frac{(-2x_1 + 4 + 2\bar{x} - 4)^2 + (-2x_2 + 4 + 2\bar{x} - 4)^2 + \dots + (-2x_5 + 4 + 2\bar{x} - 4)^2}{5} = \\ &= \frac{(-2x_1 + 2\bar{x})^2 + (-2x_2 + 2\bar{x})^2 + \dots + (-2x_5 + 2\bar{x})^2}{5} \\ &= \frac{2^2(-x_1 + \bar{x})^2 + 2^2(-x_2 + \bar{x})^2 + \dots + 2^2(-x_5 + \bar{x})^2}{5} = 4 \cdot s_x^2 = 4 \cdot 9 = 36 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } s_y = \sqrt{s_y^2} = \sqrt{36} = 6$$