## ΘΕΜΑ Α

**Α1**. Απόδειξη της παραγώγου ταυτοτικής συνάρτησης σελ. 28 Σχολικού βιβλίου.

**Α2**. Ορισμός διαμέσου (μόνο για περιττό πλήθος) σελ. 87 Σχολικού βιβλίου.

**Α3**. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1**.

| $x_i$ | $\nu_i$ | $N_i$ | $f_i\%$ | $x_i\nu_i$ |
|---|---|---|---|---|
| **0** | **5** | 5 | 25 | 0 |
| **1** | 4 | **9** | 20 | 4 |
| **2** | 2 | 11 | **10** | 4 |
| **3** | 4 | 15 | 20 | 12 |
| **4** | 5 | 20 | 25 | 20 |
| **Σύνολα** | 20 | | 100 | 40 |

$\nu_5 = \nu_1 = 5$

$f_1 = \dfrac{\nu_1}{\nu} = \dfrac{5}{20} = 0{,}25 = f_5$ ή 25%

$\nu_2 = N_2 - N_1 = 9 - 5 = 4$

$f_2 = \dfrac{\nu_2}{\nu} = \dfrac{4}{20} = 0{,}20$ ή 20%

$\nu_3 = f_3 \cdot \nu = 0{,}10 \cdot 20 = 2$

$\nu_4 = \nu - (\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_5) = 20 - 16 = 4$

$f_4 = \dfrac{\nu_4}{\nu} = \dfrac{4}{20} = 0{,}20$ ή 20%

**Β2**. $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i}{\nu} = \dfrac{40}{20} = 2$

**Β3**. Αριθμός υπαλλήλων που χρησιμοποιούν το πολύ 3 κάρτες: $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4 = N_4 = 15$

**Β4.** Ποσοστό υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 κάρτες: $f_3+f_4+f_5 = 0{,}55$ ή 55%

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** $$f'(x)=\frac{(x)'\cdot(x^2+1)-x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}+\left(\frac{1}{2}\right)'=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

**Γ2.** $$f'(-1)=\frac{1-(-1)^2}{((-1)^2+1)^2}=\frac{1-1}{(1+1)^2}=\frac{0}{4}=0$$

$$f'(1)=\frac{1-1^2}{(1^2+1)^2}=\frac{1-1}{(1+1)^2}=\frac{0}{4}=0$$

**Γ3.** $$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1$$

| x | $-\infty$ | | -1 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |
| | | | Τ.Ε. | | Τ.Μ. | | |

Η $f'(x)<0$ στο $(-\infty,-1)$, άρα η $f(x)$ είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$

Η $f'(x)>0$ στο $(-1,1)$, άρα η $f(x)$ είναι γν. αύξουσα στο $[-1,1]$

Η $f'(x)<0$ στο $(1,+\infty)$, άρα η $f(x)$ είναι γν. φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Η $f(x)$ έχει στο x= -1 Τ.Ε. την τιμή: $f(-1)=\dfrac{-1}{(-1)^2+1}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$

Η $f(x)$ έχει στο x= 1 Τ.Μ. την τιμή: $f(1)=\dfrac{1}{1^2+1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

**Γ4.** Η $f(x)$ στο διάστημα [2015, 2016] είναι γνησίως φθίνουσα. Οπότε:

$2015<2016\Rightarrow f(2015)>f(2016)$ .

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1**. $\alpha=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(x-2)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}(x-2)=4-2=2$

[$x^2-6x+8=\left(x-4\right)\left(x-2\right)$,αφού η εξίσωση $x^2-6x+8=0$ έχει ρίζες τις $x_1=4$ και $x_2=2$ ] .

**Δ2**. $f'(x)=(x^2)'+(2x)'-(3)'=2x+2$

**Δ3**. Η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι: $y=\lambda x+\beta$ , όπου $\lambda=f'(-2)$

$f'(-2)=2\cdot(-2)+2=-4+2=-2$

$f(-2)=(-2)^2+2(-2)-3=4-4-3=-3$

$y=\lambda x+\beta\Leftrightarrow -3=(-2)\cdot(-2)+\beta\Leftrightarrow -3=4+\beta\Leftrightarrow\beta=-7$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y=-2x-7$

**Δ4**. Είναι: $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}=2$

$$\bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5}{5}=\frac{\left(-2x_1-7\right)+\left(-2x_2-7\right)+\left(-2x_3-7\right)+\left(-2x_4-7\right)+\left(2x_5-7\right)}{5}=$$

$$=\frac{-2\left(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\right)+5\left(-7\right)}{5}=\frac{-2\left(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\right)}{5}+\frac{5\left(-7\right)}{5}=$$

$$=-2\cdot\bar{x}-7=-2\cdot2-7=-4-7\Leftrightarrow\bar{y}=-11$$