ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΙΟΥ 2015

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 194

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 188

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 259

Α3. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό δ) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε :

$$|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)\cdot(\bar{z}-4)=4(z-1)\cdot(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$
$$z\bar{z}-4z-4\bar{z}+16=4z\bar{z}-4z-4\bar{z}+4 \Leftrightarrow -3z\bar{z}=-12 \Leftrightarrow z\bar{z}=4 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow$$
$$|z|=2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο Κ(0,0) και ακτίνα ρ=2.

Β2. α) Οι z_1 και z_2 ανήκουν στον κύκλο του Β1 ερωτήματος άρα ισχύει:

$$|z_1|=2 \Leftrightarrow |z_1|^2=4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=4 \Leftrightarrow \bar{z}_1=\frac{4}{z_1}$$
$$|z_2|=2 \Leftrightarrow |z_2|^2=4 \Leftrightarrow z_2\bar{z}_2=4 \Leftrightarrow \bar{z}_2=\frac{4}{z_2}$$

Οπότε:

$$\bar{w}=\frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1}=\frac{2\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+\frac{2\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}=\frac{2z_2}{z_1}+\frac{2z_1}{z_2}=w\Rightarrow w\in\mathbb{R}$$

β)

$$w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\Rightarrow |w|=\left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|\le\left|\frac{2z_1}{z_2}\right|+\left|\frac{2z_2}{z_1}\right|=\frac{2|z_1|}{|z_2|}+\frac{2|z_2|}{|z_1|}=\frac{2\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 2}{2}=4\Leftrightarrow$$

$$|w|\le 4\overset{w\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}-4\le w\le 4$$

Β3.

$$w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\overset{w=-4}{\Rightarrow}-4=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\Leftrightarrow\left(z_1+z_2\right)^2=0\Leftrightarrow z_1+z_2=0\Leftrightarrow z_1=-z_2 \quad (1)$$

Οπότε αν $A(z_1)$, $B(z_2)$ και $\Gamma(z_3)$ οι εικόνες των z_1, z_2 και $z_3=2iz_1$ έχουμε:

$$(\mathrm{A\Gamma})=|z_3-z_1|=|2iz_1-z_1|=|z_1||2i-1|=2\cdot\sqrt{4+1}=2\sqrt{5}$$
$$(\mathrm{B\Gamma})=|z_3-z_2|=|z_3+z_1|=|iz_1+z_1|=|z_1||2i+1|=2\cdot\sqrt{4+1}=2\sqrt{5}=(\mathrm{A\Gamma})$$

Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)'=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-2xe^x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)}\ge 0$$

και το «ίσον» ισχύει μόνο για x=1. Οπότε $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} f\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \mathbb{R} \Rightarrow f\ \ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \mathbb{R} \\ f\uparrow \sigma\tau o\ \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(A\right)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}\cdot\lim_{x\to-\infty}e^x=0\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DL'H}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DL'H}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(2x\right)'}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

Οπότε $f\left(A\right)=\left(0,\ +\infty\right)$

Γ2. $f\uparrow \sigma\tau o\ \mathbb{R} \Rightarrow f\ \text{"1−1"}$

$$f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right)=f\left(2\right)\overset{f\ \text{"1−1"}}{\Leftrightarrow} e^{3-x}\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow\frac{e^x}{x^2+1}=\frac{e^3}{2}\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\frac{e^3}{2}\quad(1)$$

Αλλά $\frac{e^3}{2}\in f(A)$, οπότε η (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Επειδή $f\uparrow \sigma\tau o\ \mathbb{R}$ η ρίζα θα είναι μοναδική.

Γ3. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\int_0^x f\left(t\right)dt$, $x\in\mathbb{R}$

Για κάθε x>0 έχουμε 2x<4x και

- g συνεχής στο [2x, 4x], διότι $f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma \Rightarrow g\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta$
- g παραγωγίσιμη στο (2x, 4x) με παράγωγο $g'\left(x\right)=f\left(x\right)$

οπότε σύμφωνα με το ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in\left(2x,4x\right)$ ώστε

$$g'(\xi)=\frac{g(4x)-g(2x)}{4x-2x}\Leftrightarrow g(4x)-g(2x)=2xf(\xi)\Leftrightarrow$$
$$\int_0^{4x} f(t)dt-\int_0^{2x} f(t)dt=2xf(\xi)\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x} f(t)dt=2xf(\xi)$$

Επομένως η προς απόδειξη σχέση γίνεται:

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt<2xf(4x)\Leftrightarrow 2xf(\xi)<2xf(4x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(\xi)<f(4x)\Leftrightarrow \xi<4x$$

,το οποίο ισχύει.

Γ4. g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$$g'(x)=\frac{x\left(4f(4x)-2f(2x)\right)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2}=$$
$$=\frac{\left[2xf(4x)-2xf(2x)\right]+\left[2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right]}{x^2}>0$$

διότι για x>ο έχουμε:

$$4x>2x\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(4x)>f(2x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2xf(4x)-2xf(2x)>0$$

και $2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt>0$ από το Γ3 ερώτημα.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Ακόμα:

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x}\underset{DL'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\left(4f(4x)-2f(2x)\right)$$
$$=4f(0)-2f(0)=4-2=2=g(2)$$

δηλαδή g συνεχής στο 0, οπότε τελικά η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}+f'(x)e^{-f(x)}=2 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)' \Leftrightarrow$$
$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c \ \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Για x=0 έχουμε $e^{f(0)}-e^{-f(0)}=c \Leftrightarrow e^{0}-e^{0}=c \Leftrightarrow c=0$

Επομένως

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x \Leftrightarrow e^{2f(x)}-1-2xe^{f(x)}=0 \Leftrightarrow e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1 \Leftrightarrow$$
$$\left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1 \Leftrightarrow \left|e^{f(x)}-x\right|=\sqrt{x^2+1} \ \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \ (1)$$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}-x \ , x\in\mathbb{R}$.

$g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, διότι αν υπήρχε x_o τέτοιο ώστε $g(x_o)=0$

από τη σχέση (1) θα είχαμε $\sqrt{x_o^{\,2}+1}=0$ το οποίο είναι αδύνατο.

Επίσης η g είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, άρα θα διατηρεί το πρόσημο. Αλλά $g(0)=e^{f(0)}-0=e^{0}=1$

Οπότε $g(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$.

$$(1) \Leftrightarrow e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), x\in\mathbb{R}$$

Δ2. α)

$$f'(x)=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1+\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ ,x\in\mathbb{R}$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=-\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=-\frac{\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}\ ,x\in\mathbb{R}$$

- $f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow -x=0\Leftrightarrow x=0$
- $f''(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}>0\Leftrightarrow -x>0\Leftrightarrow x<0$
- $f''(x)<0\Leftrightarrow\dfrac{-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}<0\Leftrightarrow -x<0\Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+	0	-
f	∪		∩
		Σ.Κ.	

$f(0)=\ln(0+\sqrt{0^2+1}=\ln 1=0$

Η f είναι κυρτή στο $\left(-\infty,0\right]$.

Η f είναι κοίλη στο $\left[0,+\infty\right)$.

Το σημείο $M\left(0,0\right)$ είναι σημείο καμπής της f .

β) Το ζητούμενο εμβαδό είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^1 |f(x)-x|dx$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x \quad ,x\in[0,+\infty)$

$$g'(x)=f'(x)-1=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \quad ,x\in[0,+\infty)$$

$$x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+1\geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\geq 1 \Leftrightarrow 1-\sqrt{x^2+1}\leq 0 \Leftrightarrow g'(x)\leq 0$$

Και το «ίσόν» ισχύει μόνο για x=0. Οπότε $g\downarrow$ στο $[0,+\infty)$.

Άρα $x\geq 0 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x)\leq g(0) \Leftrightarrow g(x)\leq f(0)-0 \Leftrightarrow f(x)-x\leq 0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Επομένως:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^1 (x-f(x))dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1 f(x)dx=$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1 (x)' f(x)dx=\frac{1}{2}-\left(\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx\right)=$$
$$\frac{1}{2}-f(1)+\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=$$
$$=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\ \tau.\mu.$$

Δ3. Έχουμε

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0 \Rightarrow f\uparrow \sigma\tau o\ \mathbb{R}$$
$$x>0 \Rightarrow f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>0$$

Δηλαδή όταν το x «πλησιάζει» το 0 από δεξιά έχουμε $f(x)>0$.

Επομένως $\left|f(x)\right| = f(x)$.

Η συνάρτηση $f^2(t)$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών $\Rightarrow \int_0^x f^2(t)\,dt$ παραγωγίσιμη $\Rightarrow \int_0^x f^2(t)\,dt$ συνεχής $\Rightarrow \varphi(x) = e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1$ παραγωγίσιμη και συνεχής και ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right) = e^{\int_0^0 f^2(t)dt} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Έχουμε

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln f(x) \underset{\substack{x\to 0^+\\ u\to 0^+}}{\overset{u=f(x)}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln f(x)} = 0$
- $\varphi'(x) = e^{\int_0^x f^2(t)dt} \cdot \left(\int_0^x f^2(t)\,dt\right)' = e^{\int_0^x f^2(t)dt} \cdot f^2(x)$

Οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)\ln\left|f(x)\right|\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\varphi(x)\ln f(x)\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{\ln f(x)}} \underset{DL'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} \cdot f^2(x)}{-\dfrac{1}{\ln^2 f(x)} \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} \cdot f^3(x) \cdot \ln^2 f(x)}{f'(x)}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} \cdot f(x)}{f'(x)}\right) \cdot \lim_{x\to 0^+}\left(f(x) \cdot \ln f(x)\right)^2 =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} \cdot f(x)}{f'(x)}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0^+}\left(f(x) \cdot \ln f(x)\right)\right)^2 = 0 \cdot 0 = 0$$

διότι

- $$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f(x)}{f'(x)}\right)=-\frac{e^{\int_0^0 f^2(t)dt}\cdot f(0)}{f'(0)}=\frac{0\cdot 0}{\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}}=0$$

και

- $$\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)\cdot\ln f(x)\right)\underset{\substack{x\to 0^+\\ u\to 0^+}}{\overset{u=f(x)}{=}}\lim_{u\to 0^+}\left(u\cdot\ln u\right)=\lim_{u\to 0^+}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}\underset{DL'H}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}==\lim_{u\to 0^+}(-u)=0$$

Δ4. Έστω η συνάρτηση:

$$h(x)=(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t)dt\right)$$

- h συνεχής στο [2,3] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $h(2)=3\int_0^2 f^2(t)dt-8$
- $h(3)=1-3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt$

Αλλά από Δ2 ερώτημα έχουμε $f(x)-x\le 0$ για κάθε $x\in\left[0,+\infty\right)$ και από Δ3 ερώτημα έχουμε $f(x)>0$ για κάθε x>0 (οπότε $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\ge 0$. Το «ισον» ισχύει για x=0).

Δηλαδή στο $\left[0,2\right]\subseteq\left[0,+\infty\right)$ ισχύει:

$$f(t)\le t\Leftrightarrow f^2(t)\le t^2\Leftrightarrow f^2(t)-t^2\le 0$$

και η $h_1(x)=f^2(t)-t^2$ δεν είναι παντού μηδέν στο $\left[0,2\right]$, οπότε:

$$\int_0^2\left(f^2(t)-t^2\right)dt<0\Leftrightarrow\int_0^2 f^2(t)dt-\int_0^2 t^2dt<0\Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f^2(t)dt-\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2<0\Leftrightarrow\int_0^2 f^2(t)dt-\frac{8}{3}<0\Leftrightarrow$$

$$3\int_0^2 f^2(t)dt-8<0\Leftrightarrow h(2)<0$$

Στο $\left[0,1\right]\subseteq\left[0,+\infty\right)$ ισχύει:

$$f(u)\le u\overset{u=t^2}{\Leftrightarrow} f\left(t^2\right)\le t^2\Leftrightarrow f\left(t^2\right)-t^2\le 0$$

και η $h_2(x)=f\left(t^2\right)-t^2$ δεν είναι παντού μηδέν στο $\left[0,1\right]$, οπότε:

$$\int_0^1\left(f\left(t^2\right)-t^2\right)dt<0\Leftrightarrow\int_0^1 f\left(t^2\right)dt-\int_0^1 t^2dt<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1 f\left(t^2\right)dt-\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1<0\Leftrightarrow\int_0^1 f\left(t^2\right)dt-\frac{1}{3}<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt-1<0\Leftrightarrow 1-3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt>0\Leftrightarrow h(3)>0$$

Τελικά έχουμε $h(2)\cdot h(3)<0$,δηλαδή στο διάστημα $\left[2,3\right]$ ισχύουν για την h οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano. Άρα η εξίσωση

$$h(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\left(x-2\right)\left(1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt\right)+\left(x-3\right)\left(8-3\int_0^x f^2(t)dt\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt}{(x-3)}+\frac{8-3\int_0^x f^2(t)dt}{(x-2)}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2,3).