

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη Σχολικού βιβλίου, Σελ 334

A2. Θεωρία σχολικών βιβλίου, Σελ 246

A3. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου, Σελ 222

A4.

α)	β)	γ)	δ)	ε)
Λ	Σ	Σ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $(z-2)(\bar{z}-2) + |z-2| = 2 \Leftrightarrow (z-2)(\overline{z-2}) + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| = 2$
 $\Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0$, θέτουμε $|z-2| = t$ οπότε προκύπτει το τριώνυμο $t^2 + t - 2 = 0$ με διακρίνουσα 9 και ρίζες $t = 1$ ή $t = -2$, οπότε $|z-2| = 1$ (δεκτή) ή $|z-2| = -2$ (απορ) γιατί έχουμε μέτρο μιγαδικού. Επομένως ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $K(2,0)$, ακτίνας $\rho = 1$.

Επίσης είναι: $|z| = |(z-2) + 2| \leq |z-2| + 2 \leq 1 + 2 = 3 \Leftrightarrow |z| \leq 3$

B2. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2 οι οποίοι θα είναι της μορφής $z_1 = \kappa + \lambda i$ και $z_2 = \kappa - \lambda i$ για τί είναι συζυγείς. Και οι δυο ανήκουν στον παραπάνω κύκλο οπότε θα ισχύει: $|z_1 - 2| = 1$
 $\Leftrightarrow |\kappa + \lambda i - 2| = 1 \Leftrightarrow |(\kappa - 2) + \lambda i| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\kappa - 2)^2 + \lambda^2} = 1 \Leftrightarrow (\kappa - 2)^2 + \lambda^2 = 1$ (1)
 Δίνεται επίσης ότι: $|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow |\lambda - (-\lambda)| = 2 \Leftrightarrow |2\lambda| = 2 \Leftrightarrow |\lambda| = 1$ δηλαδή $\lambda = \pm 1$. Η (1) γίνεται: $(\kappa - 2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow (\kappa - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2$ και οι μιγαδικοί είναι πλέον της μορφής $z_1 = 2 + i$ και $z_2 = 2 - i$

Από τύπους του Vieta έχουμε: $z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 2 + i + 2 - i = -\frac{\beta}{1} \Leftrightarrow 4 = -\frac{\beta}{1} \Leftrightarrow \beta = -4$

Και $z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow (2 + i)(2 - i) = \frac{\gamma}{1} \Leftrightarrow \gamma = 5$. (θα μπορούσε να λυθεί και με αντικατάσταση ενός εκ των δυο μιγαδικών στην εξίσωση)

B3. $\nu^3 + \alpha_2 \nu^2 + \alpha_1 \nu + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \nu^3 = -(\alpha_2 \nu^2 + \alpha_1 \nu + \alpha_0) \Leftrightarrow |\nu^3| = |-(\alpha_2 \nu^2 + \alpha_1 \nu + \alpha_0)|$

$\Leftrightarrow |\nu|^3 \leq |\alpha_2 \nu^2| + |\alpha_1 \nu| + |\alpha_0|$ (από τριγωνική ανισότητα)

$$\begin{aligned} & |\alpha_2| = |\alpha_1| = |\alpha_0| = 3 \\ \Leftrightarrow & |v|^3 \leq |\alpha_2||v|^2 + |\alpha_1||v| + |\alpha_0| \Leftrightarrow |v|^3 \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 \quad (1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ισχύει: } & |v|^3 - 1 < |v|^3 \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 \Leftrightarrow |v|^3 - 1 < 3|v|^2 + 3|v| + 3 \Leftrightarrow |v|^3 - 1 < 3(|v|^2 + |v| + 1) \\ \Leftrightarrow & \frac{|v|^3 - 1}{|v|^2 + |v| + 1} < 3 \Leftrightarrow \frac{(|v| - 1)(|v|^2 + |v| + 1)}{|v|^2 + |v| + 1} < 3 \Leftrightarrow |v| - 1 < 3 \Leftrightarrow |v| < 4. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η δοθείσα σχέση γράφεται : $(f(x) + x)(f(x) + x)' = x$, θέτουμε $\varphi(x) = f(x) + x$ και η

προηγούμενη σχέση γίνεται : $\varphi(x) \cdot \varphi'(x) = x \Leftrightarrow \left(\frac{\varphi^2(x)}{2}\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)'$ και επειδή η $\varphi(x)$ συνεχής

ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων θα είναι : $\frac{\varphi^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + c$, για $x = 0$ έχουμε :

$$\frac{\varphi^2(0)}{2} = \frac{0^2}{2} + c \Leftrightarrow \frac{(f(0) + 0)^2}{2} = \frac{0^2}{2} + c \Leftrightarrow \frac{f(0)^2}{2} = \frac{0^2}{2} + c \Leftrightarrow \frac{(1 + 0)^2}{2} = \frac{0^2}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}, \text{ συνεπώς}$$

$$\frac{\varphi^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi^2(x) = x^2 + 1 \text{ ή } \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) + x = \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + 1} - x \\ f(x) &= -\sqrt{x^2 + 1} - x \end{aligned} \right\} \text{ επειδή η } f \text{ συνεχής και δεν μηδενίζεται θα διατηρεί σταθερό πρόσημο}$$

.Επίσης $f(1) = 1$ και ως εκ τούτου θα είναι $f(x) > 0$, οπότε $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

Γ2. Η f συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x) = (\sqrt{x^2 + 1} - x)' = (\sqrt{x^2 + 1})' - (x)'$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(x^2 + 1)' - 1 = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0 \text{ γιατί } \sqrt{x^2 + 1} > x,$$

οπότε $f'(x) < 0$, δηλαδή η f γνησίως φθίνουσα, άρα ως γνησίως μονότονη θα είναι και "1-1",

$$\text{επομένως : } f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow f(g(x)) = f(0) \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 2 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$, $h(x)$ παραγωγίσιμη με

$$h'(x) = 6x^2 + 6x.$$

Πρόσημο της $h(x)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1.$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
h'	+	0 -	0 +	
h	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

- Θεωρούμε το διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$

Η h συνεχής σε αυτό και γνησίως αύξουσα, επομένως $h(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), h(-1) \right]$
 $= (-\infty, -1]$ γιατί: $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 3x^2 - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$ ενώ $h(-1) = -1$

- Θεωρούμε το διάστημα $A_2 = [-1, 0]$

Η h συνεχής στο διάστημα αυτό και γνησίως φθίνουσα, οπότε $h(A_2) = [h(0), h(-1)]$
 $= [-2, -1]$

- Θεωρούμε το διάστημα $[0, +\infty)$

Η h συνεχής στο διάστημα αυτό και γνησίως αύξουσα, οπότε $h(A_3) = \left[h(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right)$
 $= [-2, +\infty)$

Παρατηρούμε ότι $0 \in h(A_3)$ (μόνο) συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0, +\infty)$
 τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$ και λόγω μονοτονίας θα είναι μοναδικό. Γενικά η $h(x) = 0$ έχει
 μοναδική ρίζα, την $x_0 \in [0, +\infty)$

Γ3. Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x) = \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\varphi x$ για την οποία ισχύουν :

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η $x - \frac{\pi}{4}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα η $\int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt$

παραγωγίσιμη και η φ συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι :

$$\diamond h(0) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt - f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\varphi 0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt > 0 \text{ (είναι } f(x) > 0 \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt > 0)$$

$$\diamond h\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 - f(0) \cdot \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = -1 \cdot 1 = -1 < 0, \text{ άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα}$$

$$\text{τουλάχιστον } x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \text{ τέτοιο ώστε : } h(x_0) = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από ορισμό παραγώγου έχουμε : $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$\text{Δίνεται ότι } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1) - f(1-h) + f(1)}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \right) = 0$$

$$\Rightarrow 5 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+(-h)) - f(1)}{-h} = 0$$

$$5h = t, t \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow 5 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+(-h)) - f(1)}{-h} = 0 \Rightarrow 5f'(1) - (-f'(1)) = 0$$

$$-h = y, y \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow 6f'(1) = 0.$$

$f' \nearrow$

Για $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα

$f' \nearrow$

Για $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα, ενώ για $x = 1$ ισχύει :

$f'(1) = 0$, άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) στο $x_0 = 1$.

Δ2. Η συνάρτηση $\frac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, οπότε η $g(x)$

παραγωγίσιμη με $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$, $x > 1$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, συνεπώς

$f(x) \geq f(1)$ ή $f(x) \geq 1$, άρα $g'(x) \geq 0$. Το " $=$ " ισχύει αν $x = 1$, άρα για $x > 1 \Rightarrow g'(x) > 0$

και g γνησίως αύξουσα. Έχουμε $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du$ (1). Ορίζουμε $G(x) = \int_x^{x+1} g(u)du$

, $x \in (1, +\infty)$

Θα είναι : $G(x) = \int_x^{\alpha} g(u)du + \int_{\alpha}^{x+1} g(u)du = -\int_{\alpha}^x g(u)du + \int_{\alpha}^{x+1} g(u)du$, οπότε

$G'(x) = g(x+1) - g(x) > 0$ γιατί : $x < x+1 \Rightarrow g(x) < g(x+1)$ εφ' όσον g γνησίως αύξουσα.

$G \nearrow$

Άρα G γνησίως αύξουσα και η (1) γράφεται : $G(8x^2+5) > G(2x^4+5) \Rightarrow 8x^2+5 > 2x^4+5$

$\Rightarrow 8x^2 - 2x^4 > 0 \Rightarrow 2x^2(4 - x^2) > 0 \Rightarrow 4 - x^2 > 0 \Rightarrow -2 < x < 2$ (2), αλλά επειδή $x > 1$ από (2) παίρνουμε ότι $x \in (1, 2)$

Δ3. Έχουμε $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$ με την $g'(x)$ παραγωγίσιμη ως ηλίκο παραγωγίσιμων με

$$g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - f(x) + 1}{(x-1)^2} \quad (3)$$

Με θεώρημα Μέσης Τιμής για την f (ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις) στο $[1, x]$ θα έχουμε :

υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(x) - 1}{x - 1} \Leftrightarrow f(x) - 1 = (x - 1)f'(\xi)$,

οπότε η (3) γίνεται $g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - (x-1)f'(\xi)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)[f'(x) - f'(\xi)]}{(x-1)^2}$

$$= \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x-1} > 0 \text{ γιατί } \xi < x \xrightarrow{f' \nearrow} f'(\xi) < f'(x), \text{ άρα } g \text{ κυρτή στο } (1, +\infty)$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της g στο σημείο $M(\alpha, g(\alpha))$ θα είναι : $y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x - \alpha)$

$$\Leftrightarrow y - g(\alpha) = \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}(x - \alpha) \quad \begin{matrix} g(\alpha) = 0 \\ \Leftrightarrow y = \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}(x - \alpha) \end{matrix} \text{ Επειδή η } g \text{ κυρτή η εφαπτομένη}$$

της θα βρίσκεται κάτω από την C_g , δηλαδή $g(x) \geq y$ με την ισότητα να ισχύει για $x = \alpha$.