<u>ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑ.Λ. & ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ</u>

<u>ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012</u>

Δευτέρα 28 Μαΐου 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου Σελ. 253

Α2. Ορισμός σχολικού βιβλίου Σελ.191

Α3. Ορισμός σχολικού βιβλίου Σελ. 258

Α4. α→Σ β→Σ γ→Λ δ→Λ ε→Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1)+(z+1)(\bar{z}+1)=4 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}-z-\bar{z}+1+z\cdot\bar{z}+z+\bar{z}+1=4$

$\Leftrightarrow 2\cdot z\cdot\bar{z}=2 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=1 \Leftrightarrow |z|=1$ ή $x^2+y^2=1$. Ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου Ο(0,0), ακτίνας ρ=1.

Β2. Υπολογίζουμε πρώτα την παράσταση:

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\cdot(\overline{z_1}+\overline{z_2})=z_1\cdot\overline{z_1}+z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}=$$

$$\overset{|z_1|=1}{\underset{|z_2|=1}{=}} 1+1+z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}=2+z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1} \quad \boxed{1}$$

Αρκεί να υπολογίσουμε την παράσταση $z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}$. Από τη σχέση $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$, έχουμε:

$$|z_1-z_2|^2=\sqrt{2}^2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=2 \Leftrightarrow z_1\cdot\overline{z_1}-z_1\cdot\overline{z_2}-z_2\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}=2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1})=2 \overset{|z_1|=1}{\underset{|z_2|=1}{\Leftrightarrow}} 2-(z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1})=2 \Leftrightarrow z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}=0 \quad \boxed{2}$$

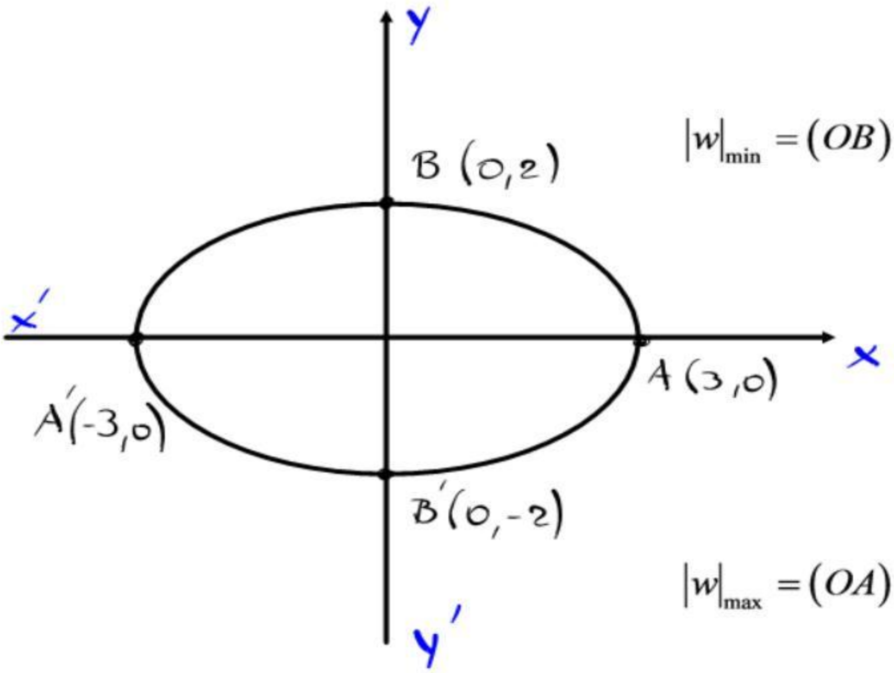
Η σχέση 1 λόγω της 2 γίνεται: $|z_1+z_2|^2=2+0 \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=2 \Leftrightarrow |z_1+z_2|=\sqrt{2}$

Β3. $|w-5\bar{w}|=12 \Leftrightarrow |w-5\bar{w}|^2=12^2 \Leftrightarrow (w-5\bar{w})(\bar{w}-5w)=144 \Leftrightarrow w\cdot\bar{w}-5w^2-5\bar{w}^2+25w\cdot\bar{w}=144 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 26w\cdot\bar{w}-5w^2-5\bar{w}^2=144 \overset{w=x+yi}{\Leftrightarrow} 26(x^2+y^2)-5(x^2-y^2+2xyi)-5(x^2-y^2-2xyi)=144 \Leftrightarrow$$

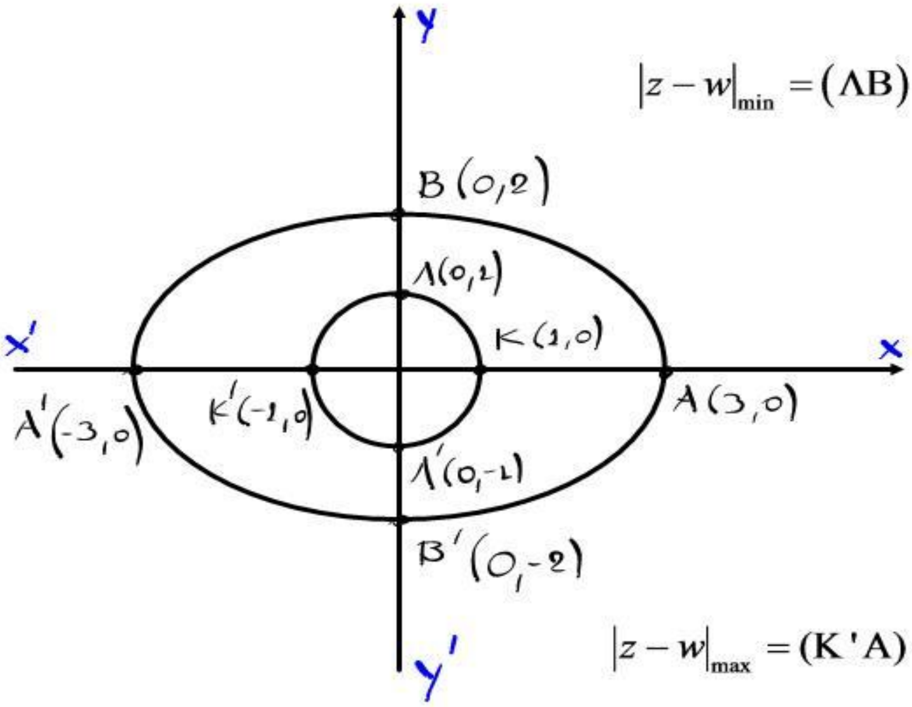
$\Leftrightarrow 16x^2+36y^2=144 \Leftrightarrow \dfrac{16x^2}{144}+\dfrac{36y^2}{144}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Ο γεωμετρικός τόπος είναι έλλειψη με:

$\begin{matrix}\alpha^2=9 \\ \beta^2=4\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}\alpha=3 \\ \beta=2\end{matrix}$. Επίσης, $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\sqrt{5}$. Εστίες έχει στον άξονα x'x τα σημεία $E(\sqrt{5},0)$ και $E'(-\sqrt{5},0)$.



$$|w|_{\min} = (OB) = (OB') = 2$$

$$|w|_{\max} = (OA) = (OA') = 3$$



$$|z - w|_{\min} = (\Lambda \mathrm{B}) = (\Lambda'\mathrm{B}') = 2 - 1 = 1$$

$$|z - w|_{\max} = (\mathrm{K}'\mathrm{A}) = (\mathrm{KA}') = 1 + 3 = 4$$

Επομένως: $1 \le |z-w| \le 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=(x-1)'\ln x+(x-1)(\ln x)'=\ln x+1-\frac{1}{x}$. Η $f'(x)=0$ έχει προφανή ρίζα την $x=1$, δηλαδή $f'(1)=0$. Η f' παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\succ 0$, γιατί $x\in(0,+\infty)$. Άρα f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

- Αν $0\prec x\prec 1 \overset{f'\,\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Rightarrow} f'(x)\prec f'(1)\Rightarrow f'(x)\prec 0$. Συνεπώς η f είναι γνησίως φρίθίνουσα στο $(0,1]$
- Αν $x\succ 1 \overset{f'\,\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Rightarrow} f'(x)\succ f'(1)\Rightarrow f'(x)\succ 0$. Άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Δηλαδή :

x	0	1	$+\infty$
f'(x)	-		+
f(x)	↘		↗

Θεωρούμε $\Delta_1=(0,1]$ και $\Delta_2=[1,+\infty)$

- Στο Δ_1 η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε : $f(\Delta_1)=[-1,+\infty)$ γιατί :
  - $f(1)=-1$ και
  - $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}[(x-1)\ln x-1]=+\infty$
- Στο Δ_2 συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε $f(\Delta_2)=[-1,+\infty)$ γιατί :
  - $f(1)=-1$ και
  - $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}[(x-1)\ln x-1]=+\infty$

Συμπερασματικά το Σύνολο Τιμών είναι το : $f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-1,+\infty)$

Γ2. $x^{x-1}=e^{2013}$**.** Η δοθείσα εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $\ln x^{x-1}=\ln e^{2013}\Leftrightarrow(x-1)\ln x=2013$ $\Leftrightarrow(x-1)\ln x-1=2013-1\Leftrightarrow f(x)=2012$ **(1)**

- Επειδή $2012\in f(\Delta_1)=[-1,+\infty)$ για την **(1)** θα υπάρχει ένας αριθμός $x_1\in(0,1]$ τέτοιος ώστε : $f(x_1)=2012$ **(2)**. Ο αριθμός (ρίζα) θα είναι μοναδικός γιατί η f γνησίως φθίνουσα στο παραπάνω διάστημα και μάλιστα θα είναι $x_1\succ 0$.

- Επίσης $2012\in f(\Delta_2)=[-1,+\infty)$ οπότε για την **(1)** θα υπάρχει $x_2\in[1,+\infty)$ τέτοιος ώστε $f(x_2)=2012$ **(3).** Η ρίζα θα είναι μοναδική γιατί f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και μάλιστα θα είναι $x_2\succ 0$. Και στις δυο περιπτώσεις θα είναι $x_1,x_2\neq 1$ γιατί $f(1)=-1\neq 2012$. Άρα συνολικά η **(1)** έχει δυο ακριβώς θετικές ρίζες.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση : $h(x)=f'(x)+f(x)-2012$. Για την h ισχύουν :

- Η h συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $[x_1,x_2]\subset(0,+\infty)$
- $h(x_1)=f'(x_1)+f(x_1)-2012\overset{(2)}{=}f'(x_1)\prec 0$
- $h(x_2)=f'(x_2)+f(x_2)-2012\overset{(3)}{=}f'(x_2)\succ 0$

Αρα $h(x_1)\cdot h(x_2)\prec 0$, οπότε ικανοποιούνται οι προυποθέσεις του Θ. Bolzano επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$, δηλαδή $f'(x_0)+f(x_0)=2012$

Γ4. Υπολογίζουμε τις ρίζες της $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)+1=0\Leftrightarrow(x-1)\ln x-1+1=0\Leftrightarrow(x-1)\ln x=0\rightarrow x=1$ ρίζα. Επίσης $g(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[1,e]$ οπότε $E(\Omega)=\int_1^e(x-1)\ln x\,dx\Leftrightarrow E(\Omega)=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\ln x\,dx$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)(\ln x)'dx=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)\ln e-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)\ln 1-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx=\frac{e^2}{2}-e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{4}-x\right)'dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-e-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-e-[\frac{e^2}{4}-e-(\frac{1^2}{4}-1)]=\frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e+\frac{1}{4}-1=\frac{e^2-3}{4}\tau.\mu$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η σχέση $\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt\geq\frac{x-x^2}{e}$ γίνεται : $\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}\geq 0$

- Η $\frac{x-x^2}{e}$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πολυωνυμική
- Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα η $\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$
- Η x^2-x+1παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}$. Είναι : $\left.\begin{matrix}g(x)\geq 0\\ g(1)=0\end{matrix}\right\}\rightarrow g(x)\geq g(1)$. Συνεπως η g παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0=1$. Από Θ. Fermat και επειδή g παραγωγίσιμη θα ισχύει :

$g'(1)=0$ **(1)**. Είναι $g'(x)=\left(\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt\right)' - \left(\frac{x-x^2}{e}\right)' = f(x^2-x+1)(x^2-x+1)' - \frac{1-2x}{e}$

$= f(x^2-x+1)(2x-1) - \frac{1-2x}{e}$. Από **(1)** : $g'(1)=0 \Leftrightarrow f(1^2-1+1)(2\cdot 1-1) - \frac{1-2}{e}=0$

$\Leftrightarrow f(1)+\frac{1}{e}=0 \Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}$. Η $f(x)\neq 0$ και συνεχής , οπότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή $f(1)=-\frac{1}{e}\prec 0$, θα είναι $f(x)\prec 0$ **(2)** στο $(0,+\infty)$. Η σχέση $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot |f(x)|$ λόγω της **(2)** γίνεται : $\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)'$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)}$ **(3).** Σύμφωνα με την εφαρμογή της σελίδας 252 του σχολικού βιβλίου αν $f(x)=f'(x)$ τότε ισχύει $f(x)=ce^x$. Επομένως η **(3)** γίνεται : $\frac{\ln x - x}{f(x)} = ce^x \Rightarrow \ln x - x = ce^x f(x)$

$\Rightarrow f(x)=ce^{-x}(\ln x - x)$. Για $x=1$: $\Rightarrow f(1)=ce^{-1}(\ln 1 - 1) \Rightarrow -\frac{1}{e}=c\frac{1}{e}(-1) \Rightarrow c=1$. Συνεπως $f(x)=e^{-x}(\ln x - x),\ x\in(0,+\infty)$.

Δ2. Επειδή $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x - x}{e^x} = -\infty$, θεωρούμε $\frac{1}{f(x)}=u$ οπότε αν $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)}=0$, δηλαδή $u\to 0$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2 \eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right] = \lim_{u\to 0}\left[\frac{1}{u^2}\eta\mu u - \frac{1}{u}\right] = \lim_{u\to 0}\left[\frac{\eta\mu u - u}{u^2}\right] \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} = \lim_{u\to 0}\left[\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u}\right] = \frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\left[\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Δ3. Η F παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $F'(x)=f(x)$ και F' παραγωγίσιμη με $F''(x)=f'(x)$ $=-e^{-x}(\ln x - x + 1 - \frac{1}{x})$ οπότε $F''(x)\succ 0$ γιατί :

- $-e^{-x}\prec 0$
- $\ln x - x + 1 \leq 0$ από **Δ2** ερώτημα
- $\frac{1}{x}\prec 0$. Αρα F κυρτή . Για κάθε $x\succ 0$ έχουμε $F(x)+F(3x)\succ 2F(2x)$ $\Leftrightarrow F(3x)-F(2x)\succ F(2x)-F(x) \Leftrightarrow \frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}\succ\frac{F(2x)-F(x)}{2x-x}$ **(4).** Οπότε αρκεί να αποδείξουμε την **(4).**

  Για την F ισχύουν οι προυποθέσεις του Θ.Μ.Τ στα $[x,2x]$ και $[2x,3x]$ γιατί είναι συνεχής στα παραπάνω διαστήματα και παραγωγίσιμη στα $(x,2x)$ και $(2x,3x)$, οπότε :

- Υπάρχει $\xi_1 \in (x,2x)$ τέτοιο ώστε : $F'(\xi_1)=\dfrac{F(2x)-F(x)}{2x-x}$
- Υπάρχει $\xi_2 \in (2x,3x)$ τέτοιο ώστε : $F'(\xi_2)=\dfrac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}$

Είναι $\xi_1 \prec \xi_2 \overset{F'\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Rightarrow} \Rightarrow F'(\xi_1) \prec F'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x} \succ \dfrac{F(2x)-F(x)}{2x-x}$ που αποτελεί και την

ζητούμενη σχέση **(4)**

Δ4. Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=F(\beta)+F(3\beta)-2F(2x)$ για την οποία ισχύουν :

- φ συνεχής στο $\left[\beta,2\beta\right]$ με :
- $\varphi(2\beta)=F(\beta)+F(3\beta)-2F(2\beta) \succ 0$ από **Δ3**. ερώτημα
- $\varphi(\beta)=F(\beta)+F(3\beta)-2F(\beta)=F(3\beta)-F(\beta) \prec 0$ γιατί $\varphi'(x)=-2F'(x)=-2f(x) \succ 0$ από **Δ1**. ερώτημα επομένως φ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και κατα συνέπεια F γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και επειδή $\beta \prec 3\beta$ θα ισχύει : $F(\beta) \succ F(3\beta)$

  Ισχύουν οι προυποθέσεις του Θ. Bolzano επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\beta,2\beta)$ τέτοιο ώστε : $\varphi(\xi)=0 \Leftrightarrow F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$ και επειδή η φ γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ το ξ που βρήκαμε είναι μοναδικό.